多重ゼータ値と弦の散乱振幅

著者	中川 弘一
雑誌名	星薬科大学一般教育論集
号	27
ページ	57-67
発行年	2009
URL	http://id.nii.ac.jp/1240/00000247/

多重ゼータ値と弦の散乱振幅

中川　弘一

概　要

多重ゼータ値を用いて開ボソン弦および閉ボソン弦理論における4- タキオン・ツリー振幅を展開し，多重ゼータ値の双対性と 4- タキオン・ツリー振幅の対称性の対応を明らかにし，多重ゼータ値の弦理論への応用について考察する．

場の量子論における散乱振幅の摂動計算は，様々な特殊関数の性質に関する知識に基づき発展してきた．それらの特殊関数のうち，ゼータ関数には数学の研究においてだけでなく物理学の研究においてもとても興味深い性質がある．例えば，Riemann ゼータ関数の値を用いた Casimir エネルギーの正則化法がその 1 つとして挙げられる [1]．また, Feynman 振幅の紫外発散の分類や多重ループの計算において，多重ゼータ値 (MZV) や多重対数関数を用いた計算の重要性が Broadhurst 達によって指摘されている [2]．これらの MZV の中にはまだ具体的に求められていないものがあり，MZV の間の関係式を求める試みが, 数学の関連分野において注目されている [3-9]．それらの研究の中では，MZV の関係式と結び目 (knot) との関連も調べられており，物理的にも興味深いテーマである [2]．MZV の数学的な構造は，Feynman 図形を数学的な観点からも興味深いものにし，また，量子場理論の紫外発散に対応する多重調和級数は数論や他の数学の分野においても注目されている．

近年，重力を含む量子場理論の最有力候補として勢力的に研究されている超弦理論 [10-12] においても，Casimir エネルギーの正則化法のようにゼータ値を用いて見通しの良い計算が可能になる場面が見られる．また, 参考文献 [13] で, 超弦の 6- グルーオン・ディスク振幅の計算においても MZV が用いられ，そ

の有用性が指摘されている．そこで，MZV と超弦理論の関わりを調べてみることは数学的にも物理的にも興味深いことであると思われる．その一端として，本稿では開ボソン弦および閉ボソン弦理論における 4- タキオン・ツリー振幅 (four-tachyon tree amplitude) を MZV で表し，その性質の対応を明確に示してみることにする．元来，双対共鳴模型においてよく知られているように，開ボソン弦理論における 4- タキオン・ツリー振幅は Veneziano 振幅に比例し，閉ボソン弦理論における 4- タキオン・ツリー振幅は Virasoro 振幅に比例する [10-12]. 本稿では開ボソン弦および閉ボソン弦理論の 4- タキオン・ツリー振幅に限定するが，他の超弦理論の 4- タキオン・ツリー振幅も開ボソン弦および閉ボソン弦の 4- タキオン・ツリー振幅と同様に Veneziano 振幅，Virasoro 振幅を用いて表すことができることがよく知られているため，同様の計算ができるであろうと思われる．他の超弦理論における 4- タキオン・ツリー振幅に関する具体的な計算については今後扱いたい課題の 1 つである．

まず，参考文献 [3] に遵い，本稿で必要な MZV の性質をまとめておく．MVZ は正の整数 $k_1 \geq 2; k_2, k_3, \cdots, k_n \geq 1$ に対し，多重級数

$$\zeta(k_1, k_2, \ldots, k_n) := \sum_{m_1 > m_2 > \cdots > m_n > 0} \frac{1}{{m_1}^{k_1} {m_2}^{k_2} \cdots {m_n}^{k_n}} \tag{1}$$

で定義される．(1) の右辺の級数は $k_1 > 1$ のときに収束し，$k_1 = 1$ のときに発散する．$k := k_1 + k_2 + \cdots + k_n$ は MZV の重さ，n は MZV の深さ (または長さ) とよばれ，深さが 1 の MZV は Riemann ゼータ値 $\zeta(k)$になる．

反復積分

$$\begin{aligned} I(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k) &= \int \cdots \int_{1 > t_1 > \cdots > t_k > 0} A_{\varepsilon_1}(t_1) \cdots A_{\varepsilon_k}(t_k) dt_1 \cdots dt_k \\ &= \int_0^1 A_{\varepsilon_1}(t_1) dt_1 \int_0^{t_1} A_{\varepsilon_2}(t_2) dt_2 \cdots \int_0^{t_{k-2}} A_{\varepsilon_{k-1}}(t_{k-1}) dt_{k-1} \int_0^{t_{k-1}} A_{\varepsilon_k}(t_k) dt_k \end{aligned} \tag{2}$$

を考える．(2) の反復積分は Drinfel'd 積分と呼ばれることもある．ここで，$\varepsilon_i =$ 0 または1 $(1 \leq i \leq k)$，$A_0(t) = \dfrac{1}{t}$ および $A_1(t) = \dfrac{1}{1-t}$とし，$\varepsilon_1 = 0$ かつ $\varepsilon_k = 1$が成り立つとする．反復積分表示 (2) における積分変数変換 $(t_1, \ldots, t_k) \to (1-t_k, \ldots, 1-t_1)$の下での不変性から，$I(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k)$ は対称性

$$I(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_k)=I(1-\varepsilon_k,\ldots,1-\varepsilon_1) \tag{3}$$

を持つことが分かる．また，この反復積分表示 (2) を用いて MZV(1) は

$$\zeta(k_1,k_2,\ldots,k_n)=I(\underbrace{0,\ldots,0}_{k_1-1},1,\underbrace{0,\ldots,0}_{k_2-1},1,0,\ldots,1,\underbrace{0,\ldots,0}_{k_n-1},1) \tag{4}$$

と表されるので [3]，対称性 (3) からこの後で説明する MZV の双対性定理が導かれることが推察できる．この対称性 (3) を MZV の双対性定理に書き換えるために，成分が自然数のインデックス $\mathbf{k}=(k_1,\ldots,k_n)$を導入する．この$\mathbf{k}$は $k_1\geq 2$ のときには収束インデックスと呼ばれる．収束インデックス$\mathbf{k}$の成分を，2 以上の成分と 1 の成分に分けて

$$\mathbf{k}=(a_1+1,\underbrace{1,\ldots,1}_{b_1-1},a_2+1,\underbrace{1,\ldots,1}_{b_2-1},\ldots,a_s+1,\underbrace{1,\ldots,1}_{b_s-1})\ ,\quad (a_1,b_1,\ldots,a_s,b_s\geq 1) \tag{5}$$

と表すとき，$\mathbf{k}$の双対インデックス$\mathbf{k}'$を

$$\mathbf{k}'=(b_s+1,\underbrace{1,\ldots,1}_{a_s-1},b_{s-1}+1,\underbrace{1,\ldots,1}_{a_{s-1}-1},\ldots,b_1+1,\underbrace{1,\ldots,1}_{a_1-1}) \tag{6}$$

と定義する．このとき，$\mathbf{k}$と$\mathbf{k}'$は互いに双対になっており，$\mathbf{k}$の深さは$\sum_{j=1}^{s}b_j$，$\mathbf{k}'$の深さは$\sum_{j=1}^{s}a_j$，$\mathbf{k}$と$\mathbf{k}'$の重さは等しく$\sum_{j=1}^{s}(a_j+b_j)$となっていることが分かる．(4),(5),(6) 式より

$$\begin{aligned}\zeta(\mathbf{k})&=I(\underbrace{0,\ldots,0}_{a_1},\underbrace{1,\ldots,1}_{b_1},\ldots,\underbrace{0,\ldots,0}_{a_s},\underbrace{1,\ldots,1}_{b_s})\\ \zeta(\mathbf{k}')&=I(\underbrace{0,\ldots,0}_{b_s},\underbrace{1,\ldots,1}_{a_s},\ldots,\underbrace{0,\ldots,0}_{b_1},\underbrace{1,\ldots,1}_{a_1})\end{aligned} \tag{7}$$

なので，(3) 式より，MZV の双対性定理

$$\zeta(\mathbf{k})=\zeta(\mathbf{k}') \tag{8}$$

が成り立つ．双対性定理 (8) の一例として，自然数m, nに対し，

$$\zeta(m+1,\underbrace{1,\ldots,1}_{n-1})=\zeta(n+1,\underbrace{1,\ldots,1}_{m-1}) \tag{9}$$

が挙げられ，後述される 4- タキオン・ツリー振幅の対称性と関係がある．

つぎに，ガンマ関数と Riemann ゼータ値の関係について，参考文献 [3] に則って説明する．ここでは Gauss による定義

$$\Gamma(1+x) = \lim_{N\to\infty} \frac{N!\cdot N^x}{(x+1)(x+2)\cdots(x+N)}\ , \qquad \forall x \in \mathbb{C} \tag{10}$$

から始める．(10) 式右辺の極限の中で，$N^x = \exp(x\ln N)$ を Euler 定数 γ の定義

$$\gamma = \lim_{N\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{N}-\ln N\right) \tag{11}$$

により置き換えると，Weierstrass の無限積表示

$$\Gamma(1+x) = \left(e^{\gamma x}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)e^{-x/n}\right)^{-1}\ , \qquad \forall x\in\mathbb{C} \tag{12}$$

が得られる．(12) 式で $|x|<1$ として両辺の対数をとると

$$\begin{aligned}\ln\Gamma(1+x) &= -\gamma x - \sum_{n=1}^{\infty}\left(\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)-\frac{x}{n}\right)\\ &= -\gamma x - \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{m=2}^{\infty}(-1)^{m-1}\frac{1}{m}\cdot\frac{x^m}{n^m}\right)\\ &= -\gamma x - \sum_{m=2}^{\infty}(-1)^{m-1}\frac{\zeta(m)}{m}\ x^m\ , \qquad |x|<1\end{aligned} \tag{13}$$

なので，Riemann ゼータ値 $\zeta(m)$ を用いたガンマ関数の表示式

$$\Gamma(1+x) = \exp\left(-\gamma x + \sum_{m=2}^{\infty}(-1)^m\frac{\zeta(m)}{m}\ x^m\right)\ , \qquad |x|<1 \tag{14}$$

が得られる．この表式 (14) 中の Euler 定数 γ を $\zeta(1)$を正則化した値とみなして

$$\Gamma(1+x) = \exp\left(\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\frac{\zeta(m)}{m}\ x^m\right)\ , \qquad |x|<1 \tag{15}$$

と表わすこともできる．

以上のことを基にして，開ボソン弦の 4- タキオン・ツリー振幅 [11]

$$\begin{aligned}A_{\mathrm{ob}}(s,t,u) = \frac{2ig_{\mathrm{o}}^2}{\alpha'}(2\pi)^{26}\delta^{26}\left(\sum_{i=1}^{4}k_i\right)&\\ \times\left[B(-\alpha_{\mathrm{o}}(s),-\alpha_{\mathrm{o}}(t))+B(-\alpha_{\mathrm{o}}(t),-\alpha_{\mathrm{o}}(u))+B(-\alpha_{\mathrm{o}}(u),-\alpha_{\mathrm{o}}(s))\right]&\end{aligned} \tag{16}$$

について考察する．ここで，$k_1; k_2; k_3; k_4$ はそれぞれ 26 次元時空における外線タキオンのエネルギー－運動量，g_{o} は開弦の結合定数, Bはそれぞれベータ関数,$s=-(k_1+k_2)^2$, $t=-(k_1+k_3)^2$, $u=-(k_1+k_4)^2$はそれぞれ Mandelstam

変数，$\alpha_{\mathrm{o}}(x)=1+\alpha' x$ は開弦の Regge 軌跡関数，α' は Regge 軌跡の傾きである [11]．また，外線タキオンのエネルギー－運動量保存則と on-shell 条件から $s+t+u=-\frac{4}{\alpha'}$ が成り立つときは s，t，u のうち独立な変数は 2 つになる．(16) の $A_{\mathrm{ob}}(s,t,u)$ には，ベータ関数の対称性 $B(-\alpha_{\mathrm{o}}(x),-\alpha_{\mathrm{o}}(y))=B(-\alpha_{\mathrm{o}}(y),-\alpha_{\mathrm{o}}(x))$ と関連し，s，t，u に関する巡回的対称性

$$\begin{aligned} A_{\mathrm{ob}}(s,t,u) &= A_{\mathrm{ob}}(t,u,s) = A_{\mathrm{ob}}(u,s,t) \\ &= A_{\mathrm{ob}}(t,s,u) = A_{\mathrm{ob}}(s,u,t) = A_{\mathrm{ob}}(u,t,s) \end{aligned} \tag{17}$$

が備わっている [11]．ガンマ関数の表示式 (15) を (16) 式右辺のベータ関数に適用すると

$$\begin{aligned} B(-\alpha_{\mathrm{o}}(x),-\alpha_{\mathrm{o}}(y)) =& -\left(\frac{1}{\alpha_{\mathrm{o}}(x)}+\frac{1}{\alpha_{\mathrm{o}}(y)}\right) \\ & \times \exp\left(\sum_{m=2}^{\infty}\frac{\zeta(m)}{m}\left\{\alpha_{\mathrm{o}}(x)^m+\alpha_{\mathrm{o}}(y)^m-(\alpha_{\mathrm{o}}(x)+\alpha_{\mathrm{o}}(y))^m\right\}\right), \\ & |\alpha_{\mathrm{o}}(x)+\alpha_{\mathrm{o}}(y)|<1 \end{aligned} \tag{18}$$

となる．Riemann ゼータ値 $\zeta(m)$ による表示の (18) 式右辺においても，$x \leftrightarrow y$ についての対称性は明らかである．

つぎに，表示式 (18) を多重ゼータ値を用いて表すときに重要な公式

$$1-\sum_{m,n=1}^{\infty}\zeta(m+1,\underbrace{1,\ldots,1}_{n-1})X^mY^n=\exp\left(\sum_{m=2}^{\infty}\frac{\zeta(m)}{m}\left\{X^m+Y^m-(X+Y)^m\right\}\right) \tag{19}$$

について説明する [1]．公式 (19) は元々 Aomoto [14], Drinfel'd [15], Zagier により考案されたものであるが，ここでは特に Zagier による証明の概略について紹介しておく [3]．公式 (19) の左辺にある多重ゼータ値 $\zeta(m+1,1,\ldots 1)$ の反復積分表示を書き下すと

$$\begin{aligned} \zeta(m+1,\underbrace{1,\ldots,1}_{n-1}) &= I(\underbrace{0,\ldots,0}_{m},\underbrace{1,\ldots,1}_{n}) \\ &= \int\cdots\int_{1>t_1>\cdots>t_m>u_1>\cdots>u_n>0}\frac{dt_1}{t_1}\cdots\frac{dt_m}{t_m}\frac{du_1}{1-u_1}\cdots\frac{du_n}{1-u_n}. \end{aligned} \tag{20}$$

---

[1] (19) 式両辺の係数を比べると，多重ゼータ値 $\zeta(m+1,\underbrace{1,\ldots,1}_{n-1})$ を Riemann ゼータ値の多項式で表せることが推察できるが，具体的な表式を得ることはかなり困難である．

(20) 式右辺の多重積分は

$$\int_{1>t_1>\cdots>t_m>u_1}\cdots\int \frac{dt_1}{t_1}\cdots\frac{dt_m}{t_m} = \int_{u_1}^{1}\frac{dt_1}{t_1}\int_{u_1}^{t_1}\frac{dt_2}{t_2}\cdots\int_{u_1}^{t_{m-1}}\frac{dt_m}{t_m} = \frac{1}{m!}\ln^m\left(\frac{1}{u_1}\right) \tag{21}$$

と計算できるので，

$$\zeta(m+1,\underbrace{1,\ldots,1}_{n-1}) = \int_0^1 \frac{1}{m!}\ln^m\left(\frac{1}{u_1}\right)\frac{1}{(n-1)!}\ln^{n-1}\left(\frac{1}{1-u_1}\right)\frac{du_1}{1-u_1} \tag{22}$$

となる．したがって，$-1<Y<0,\ -1<X<1$ に対し

$$\begin{aligned}
&\sum_{m,n=1}^{\infty}\zeta(m+1,\underbrace{1,\ldots,1}_{n-1})X^mY^{n-1}\\
&\quad = \int_0^1\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m!}\left(X\ln\left(\frac{1}{u_1}\right)\right)^m\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}\left(Y\ln\left(\frac{1}{1-u_1}\right)\right)^{n-1}\frac{du_1}{1-u_1}\\
&\quad = \int_0^1\left(u_1^{-X}-1\right)(1-u_1)^{-Y-1}du_1\\
&\quad = \frac{\Gamma(1-X)\Gamma(-Y)}{\Gamma(1-X-Y)}+\frac{1}{Y}.
\end{aligned} \tag{23}$$

この (23) 式に (14) 式を代入することにより，(19) 式が得られる．

公式 (19) により，(18) 式のベータ関数は

$$\begin{aligned}
B(-\alpha_{\mathrm{o}}(x),-\alpha_{\mathrm{o}}(y)) &= -\left(\frac{1}{\alpha_{\mathrm{o}}(x)}+\frac{1}{\alpha_{\mathrm{o}}(y)}\right)\\
&\quad\times\left(1-\sum_{m,n=1}^{\infty}\zeta(m+1,\underbrace{1,\ldots,1}_{n-1})\alpha_{\mathrm{o}}(x)^m\alpha_{\mathrm{o}}(y)^n\right),\\
&\qquad |\alpha_{\mathrm{o}}(x)+\alpha_{\mathrm{o}}(y)|<1
\end{aligned} \tag{24}$$

と表わされる．(16) 式と (24) 式から明らかなように，開ボソン弦の 4- タキオン・ツリー振幅 $A_{\mathrm{ob}}(s,t,u)$ の s,t,u についての巡回的対称性 (18) は多重ゼータ値の双対性の一例 (9) により保証されていることが分かる．Regge 軌跡関数 $\alpha_{\mathrm{o}}(x),\alpha_{\mathrm{o}}(y)$ の各次数でまとめるため，$\ell := m+n-2$ として，

$$\begin{aligned}
B(-\alpha_{\mathrm{o}}(x),-\alpha_{\mathrm{o}}(y)) &= -\frac{1}{\alpha_{\mathrm{o}}(x)}-\frac{1}{\alpha_{\mathrm{o}}(y)}\\
&\quad+(\alpha_{\mathrm{o}}(x)+\alpha_{\mathrm{o}}(y))\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\ell+1}\zeta(m+1,\underbrace{1,\ldots,1}_{\ell-m+1})\alpha_{\mathrm{o}}(x)^{m-1}\alpha_{\mathrm{o}}(y)^{\ell-m+1},\\
&\qquad |\alpha_{\mathrm{o}}(x)+\alpha_{\mathrm{o}}(y)|<1,
\end{aligned} \tag{25}$$

さらに，初めの数項を書き下してみると

$$
\begin{aligned}
B(-\alpha_{\mathrm{o}}(x), -\alpha_{\mathrm{o}}(y)) \simeq & -\frac{1}{\alpha_{\mathrm{o}}(x)} - \frac{1}{\alpha_{\mathrm{o}}(y)} + \frac{\pi^2}{6}\left(\alpha_{\mathrm{o}}(x)+\alpha_{\mathrm{o}}(y)\right) + \zeta(3)\left(\alpha_{\mathrm{o}}(x)+\alpha_{\mathrm{o}}(y)\right)^2 \\
& + \frac{\pi^4}{90}\left(\alpha_{\mathrm{o}}(x)+\alpha_{\mathrm{o}}(y)\right)\left(\alpha_{\mathrm{o}}(x)^2 + \frac{\alpha_{\mathrm{o}}(x)\alpha_{\mathrm{o}}(y)}{4} + \alpha_{\mathrm{o}}(y)^2\right) \\
& + \left(\alpha_{\mathrm{o}}(x)+\alpha_{\mathrm{o}}(y)\right)^2 \left\{\zeta(5)\left(\alpha_{\mathrm{o}}(x)^2+\alpha_{\mathrm{o}}(y)^2\right) + \left(\zeta(4,1)-\zeta(5)\right)\alpha_{\mathrm{o}}(x)\alpha_{\mathrm{o}}(y)\right\} \\
& + O\left(\alpha_{\mathrm{o}}(x)^m \alpha_{\mathrm{o}}(y)^{6-m}\right)\ , \\
& \qquad |\alpha_{\mathrm{o}}(x)+\alpha_{\mathrm{o}}(y)| < 1
\end{aligned}
\tag{26}
$$

となる．ここではゼータ値の間の関係式 $\zeta(2) = \pi^2/6$，$\zeta(2,1) = \zeta(3)$，$\zeta(2,1,1) = 4\zeta(3,1) = \zeta(4) = \pi^4/90$，$\zeta(2,1,1,1) = \zeta(5)$ および $\zeta(3,1,1) = \zeta(4,1)$ を用いた．(26) 式を開ボソン弦の 4- タキオン・ツリー振幅 (16) に代入すると

$$
\begin{aligned}
A_{\mathrm{ob}}(s,t,u) \simeq & \frac{2ig_{\mathrm{o}}^2}{\alpha'}(2\pi)^{26}\delta\left(\sum_{i=1}^{4} k_i\right) \\
& \times \Bigg[-2\left\{\frac{1}{\alpha_{\mathrm{o}}(s)} + \frac{1}{\alpha_{\mathrm{o}}(t)} + \frac{1}{\alpha_{\mathrm{o}}(u)}\right\} + \frac{\pi^2}{3}\left(\alpha_{\mathrm{o}}(s)+\alpha_{\mathrm{o}}(t)+\alpha_{\mathrm{o}}(u)\right) \\
& \quad + \zeta(3)\left\{\left(\alpha_{\mathrm{o}}(s)+\alpha_{\mathrm{o}}(t)+\alpha_{\mathrm{o}}(u)\right)^2 + \alpha_{\mathrm{o}}(s)^2 + \alpha_{\mathrm{o}}(t)^2 + \alpha_{\mathrm{o}}(u)^2\right\} \\
& \quad + \frac{\pi^4}{360}\Big\{8\left(\alpha_{\mathrm{o}}(s)+\alpha_{\mathrm{o}}(t)+\alpha_{\mathrm{o}}(u)\right)^3 \\
& \quad - 19(\alpha_{\mathrm{o}}(s)\alpha_{\mathrm{o}}(t)^2 + \alpha_{\mathrm{o}}(t)\alpha_{\mathrm{o}}(u)^2 + \alpha_{\mathrm{o}}(u)\alpha_{\mathrm{o}}(s)^2 \\
& \quad + \alpha_{\mathrm{o}}(s)^2\alpha_{\mathrm{o}}(t) + \alpha_{\mathrm{o}}(t)^2\alpha_{\mathrm{o}}(u) + \alpha_{\mathrm{o}}(u)^2\alpha_{\mathrm{o}}(s)) \\
& \quad - 48\alpha_{\mathrm{o}}(s)\alpha_{\mathrm{o}}(t)\alpha_{\mathrm{o}}(u)\Big\} + \cdots \Bigg]
\end{aligned}
\tag{27}
$$

を得る．(27) 式右辺第 1 項, 第 2 項および第 3 項はそれぞれ s-，t- および u-チャンネルにおけるタキオンの伝搬関数に相当する項である．また，on-shell 条件より $\alpha_{\mathrm{o}}(s) + \alpha_{\mathrm{o}}(t) + \alpha_{\mathrm{o}}(u) = -1$ を課すと，(27) 式右辺には s, t, u に依らない定数項

$$
\frac{2ig_{\mathrm{o}}^2}{\alpha'}(2\pi)^{26}\delta\left(\sum_{i=1}^{4} k_i\right)\left[-\frac{\pi^2}{3} + \zeta(3) - \frac{\pi^4}{45} + \cdots\right]
\tag{28}
$$

が現れることが分かる．一方，ここで考えている開ボソン弦の端点に Chan-Paton 因子 λ_{ij}^a を導入した場合の 4- タキオン・ツリー振幅は

$$A_{\mathrm{ob}}(s,t,u) = \frac{ig_{\mathrm{o}}^2}{\alpha'}(2\pi)^{26}\delta^{26}\left(\sum_{i=1}^{4} k_i\right)$$
$$\times \Big[\mathrm{Tr}(\lambda^{a_1}\lambda^{a_2}\lambda^{a_4}\lambda^{a_3} + \lambda^{a_1}\lambda^{a_3}\lambda^{a_4}\lambda^{a_2})B(-\alpha_{\mathrm{o}}(s), -\alpha_{\mathrm{o}}(t))$$
$$+ \mathrm{Tr}(\lambda^{a_1}\lambda^{a_2}\lambda^{a_3}\lambda^{a_4} + \lambda^{a_1}\lambda^{a_4}\lambda^{a_3}\lambda^{a_2})B(-\alpha_{\mathrm{o}}(t), -\alpha_{\mathrm{o}}(u))$$
$$+ \mathrm{Tr}(\lambda^{a_1}\lambda^{a_3}\lambda^{a_2}\lambda^{a_4} + \lambda^{a_1}\lambda^{a_4}\lambda^{a_2}\lambda^{a_3})B(-\alpha_{\mathrm{o}}(u), -\alpha_{\mathrm{o}}(s))\Big] \quad (29)$$

となるので [11], (27) 式の形にまとめることはできない．(27) 式や (29) 式の物理的な解釈としては，α' の各次数の項が開ボソン弦タキオンの相互作用の形を与えていることであるが，これについて現実的な模型ではないので，外線をゼロ質量ベクトルボソン等で考える必要がある．

つぎに，閉ボソン弦の 4- タキオン・ツリー振幅 $A_{\mathrm{cb}}(s,t,u)$ を考える．$A_{\mathrm{cb}}(s,t,u)$はガンマ関数を用いて

$$A_{\mathrm{cb}}(s,t,u) = \frac{8\pi i g_{\mathrm{c}}^2}{\alpha'}(2\pi)^{26}\delta^{26}\left(\sum_{i=1}^{4} k_i\right)$$
$$\times \frac{\Gamma(-\alpha_{\mathrm{c}}(s))\Gamma(-\alpha_{\mathrm{c}}(t))\Gamma(-\alpha_{\mathrm{c}}(u))}{\Gamma(-\alpha_{\mathrm{c}}(s)-\alpha_{\mathrm{c}}(t))\Gamma(-\alpha_{\mathrm{c}}(t)-\alpha_{\mathrm{c}}(u))\Gamma(-\alpha_{\mathrm{c}}(u)-\alpha_{\mathrm{c}}(s))} \quad (30)$$

と表わされる [11]．ここで, g_{c}は閉弦の結合定数，s, t, u はそれぞれ Mandelstam 変数, $\alpha_{\mathrm{c}}(x) = 1 + \alpha' x/4$ は閉弦の Regge 軌跡関数である [11]．また，外線タキオンのエネルギー－運動量保存則と on-shell 条件から $s + t + u = -\frac{16}{\alpha'}$ が成り立つ．(30) 式からこの$A_{\mathrm{cb}}(s,t,u)$についても (18) 式と同様の s, t, u に関する巡回的対称性があることが分かる．(30) 式右辺のガンマ関数に$\Gamma(x)\Gamma(1-x)\sin(\pi x) = \pi$ を適用すると

$$A_{\mathrm{cb}}(s,t,u) = \frac{8\pi i g_{\mathrm{c}}^2}{3\alpha'}(2\pi)^{26}\delta^{26}\left(\sum_{i=1}^{4} k_i\right)$$
$$\times \Bigg[\left(\frac{\sin(-\pi\alpha_{\mathrm{c}}(t))}{\pi}\right) B\left(-\alpha_{\mathrm{c}}(s), -\alpha_{\mathrm{c}}(t)\right) B\left(-\alpha_{\mathrm{c}}(t), -\alpha_{\mathrm{c}}(u)\right)$$
$$+ \left(\frac{\sin(-\pi\alpha_{\mathrm{c}}(s))}{\pi}\right) B\left(-\alpha_{\mathrm{c}}(t), -\alpha_{\mathrm{c}}(s)\right) B\left(-\alpha_{\mathrm{c}}(s), -\alpha_{\mathrm{c}}(u)\right)$$
$$+ \left(\frac{\sin(-\pi\alpha_{\mathrm{c}}(u))}{\pi}\right) B\left(-\alpha_{\mathrm{c}}(s), -\alpha_{\mathrm{c}}(u)\right) B\left(-\alpha_{\mathrm{c}}(u), -\alpha_{\mathrm{c}}(t)\right)\Bigg] \quad (31)$$

とベータ関数の積で表わされるので, (31) 式の閉ボソン弦の 4- タキオン・ツリー振幅 $A_{\mathrm{cb}}(s,t,u)$ に公式 (19) を代入すると

$$
\begin{aligned}
A_{\mathrm{cb}}(s,t,u) = &-\frac{8\pi i g_{\mathrm{c}}^2}{3\alpha'}(2\pi)^{26}\delta^{26}\left(\sum_{i=1}^{4}k_i\right) \\
&\times\left[\frac{(\alpha_{\mathrm{c}}(s)+\alpha_{\mathrm{c}}(t))(\alpha_{\mathrm{c}}(t)+\alpha_{\mathrm{c}}(u))}{\alpha_{\mathrm{c}}(s)\alpha_{\mathrm{c}}(t)\alpha_{\mathrm{c}}(u)}\left(\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\frac{(\pi\alpha_{\mathrm{c}}(t))^{2j}}{(2j+1)!}\right)\right. \\
&\times\left(1-\sum_{m,n=1}^{\infty}\zeta(m+1,\underbrace{1,\ldots,1}_{n-1})\alpha_{\mathrm{c}}(s)^m\alpha_{\mathrm{c}}(t)^n\right) \\
&\times\left.\left(1-\sum_{k,\ell=1}^{\infty}\zeta(k+1,\underbrace{1,\ldots,1}_{\ell-1})\alpha_{\mathrm{c}}(t)^k\alpha_{\mathrm{c}}(u)^\ell\right)+\{t\leftrightarrow u\}+\{u\leftrightarrow s\}\right]
\end{aligned}
\tag{32}
$$

となる．これについても，初めの数項を書き下してみると

$$
\begin{aligned}
A_{\mathrm{cb}}(s,t,u) \simeq &\frac{8\pi i g_{\mathrm{c}}^2}{3\alpha'}(2\pi)^{26}\delta^{26}\left(\sum_{i=1}^{4}k_i\right) \\
&\times\left[-\frac{1}{\alpha_{\mathrm{c}}(s)}-\frac{1}{\alpha_{\mathrm{c}}(t)}-\frac{1}{\alpha_{\mathrm{c}}(u)}-\frac{(\alpha_{\mathrm{c}}(s)+\alpha_{\mathrm{c}}(t)+\alpha_{\mathrm{c}}(u))^2}{\alpha_{\mathrm{c}}(s)\alpha_{\mathrm{c}}(t)\alpha_{\mathrm{c}}(u)}\right. \\
&+\frac{\pi^2}{6}\left\{\frac{(\alpha_{\mathrm{c}}(s)+\alpha_{\mathrm{c}}(t)+\alpha_{\mathrm{c}}(u))^4}{\alpha_{\mathrm{c}}(s)\alpha_{\mathrm{c}}(t)\alpha_{\mathrm{c}}(u)}\right. \\
&-2\frac{\alpha_{\mathrm{c}}(s)+\alpha_{\mathrm{c}}(t)+\alpha_{\mathrm{c}}(u)}{\alpha_{\mathrm{c}}(s)\alpha_{\mathrm{c}}(t)\alpha_{\mathrm{c}}(u)}\left(\alpha_{\mathrm{c}}(s)^2\alpha_{\mathrm{c}}(t)+\alpha_{\mathrm{c}}(s)\alpha_{\mathrm{c}}(t)^2+\{t\leftrightarrow u\}+\{u\leftrightarrow s\}\right) \\
&\left.-3\left(\alpha_{\mathrm{c}}(s)+\alpha_{\mathrm{c}}(t)+\alpha_{\mathrm{c}}(u)\right)\right\} \\
&+\zeta(3)\left\{\frac{(\alpha_{\mathrm{c}}(s)+\alpha_{\mathrm{c}}(t))^2(\alpha_{\mathrm{c}}(t)+\alpha_{\mathrm{c}}(u))}{\alpha_{\mathrm{c}}(u)}+\frac{(\alpha_{\mathrm{c}}(s)+\alpha_{\mathrm{c}}(t))(\alpha_{\mathrm{c}}(t)+\alpha_{\mathrm{c}}(u))^2}{\alpha_{\mathrm{c}}(s)}\right. \\
&\qquad\left.\left.+\{t\leftrightarrow u\}+\{u\leftrightarrow s\}\right\}+\cdots\right]
\end{aligned}
\tag{33}
$$

となる．(33) 式右辺においても第 1 項，第 2 項および第 3 項はそれぞれ s-，t- および u- チャンネルにおけるタキオンの伝搬関数に相当する項である．(33) 式の物理的な解釈として，α' の各次数の項が閉ボソン弦タキオンの相互作用の形を与えていることであるが，これについて現実的な模型ではないので，外線を重力理論のゼロ質量状態（ディラトン，重力子，テンソル場等）で考える必

要がある．

以上において，開ボソン弦および閉ボソン弦理論における 4- タキオン・ツリー振幅を MZV を用いて展開し，その性質について考察した．特に，これらの振幅の巡回対称性と MZV の双対性 (9) の関係は興味深いものであり，他の超弦理論における N 点ツリー振幅の計算においても役立つものであると推察できる．実際，参考文献 [13] の 6 点グルーオン・ツリー振幅の計算においては MZV が用いられているが，本稿のベータ関数の展開式 (24) や双対性 (9) はまだ見落とされているように思われる．また, 開ボソン弦の 4- タキオン・ツリー振幅の展開 (27) および閉ボソン弦の 4- タキオン・ツリー振幅の展開 (33) は外線タキオンの Regge 軌跡関数 $\alpha_{\mathrm{o}}(s), \alpha_{\mathrm{o}}(t), \alpha_{\mathrm{o}}(u)$および $\alpha_{\mathrm{c}}(s), \alpha_{\mathrm{c}}(t), \alpha_{\mathrm{c}}(u)$についておこなったが，超弦理論における 4 点振幅は超対称性のためそれぞれのタキオンモードと結合せず，基底状態がゼロ質量の状態となるため，外線をゼロ質量の状態とする場合には上記の展開式を α' の各次数でより簡潔にまとめることができる. 今回, 本稿で扱った方法を様々な超弦理論におけるN点ツリー振幅や Yang-Mills 場の高次相互作用項の計算に応用することは興味深い今後の課題である．

参考文献

[1] C. G. Beneventano and E. M. Santangelo, Int. J. Mod. Phys. **A11** (1996), 2871.

[2] J. D. Broadhurst and D. Kreimer, Phys.Lett. **B393** (1997), 403 .

[3] T. Arakawa and M. Kaneko," 多重ゼータ値および多重 L 値ノート ", lectures at Waseda Univ., etc., (2002).

[4] D. Zagier, "Values of zeta functions and their applications" in *First European Congress of Mathematics* (Birkhäuser, Boston, 1997), Vol.II, 497.

[5] T. Q. T. Le and J. Murakami, Topol. Appl. **62** (1995), 193; Nagoya Math. J. **142** (1996), 39.

[6] A. B. Goncharov, Math. Res. Lett. **5** no 4. (1998), 497.

[7] T. Terasoma, math/9908045v1; math/0104231v2.

[8] H. Furusho, math/0011261v6.

[9] G. Racinet, C.R. Acad. Sci. Paris ser. I math. **333** (2001), no. 1, 5.

[10] Green M. B., Schwarz J. H. and Witten E., *Superstring Theory,* Vols. 1 and 2 (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1987).

[11] Polchinski J., *Superstring Theory,* Vols. I and II (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1998).

[12] Zwiebach B., *A First Course in String Theory,* (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2004).

[13] D. Oprisa and S. Stieberger, hep-th/0509042v1.

[14] K. Aomoto, Illinois J. of Math., **34-2** (1990),191.

[15] V. G. Drinfel'd, Leningrad Math. J., **2** (1991),829.